



MATHS · TERMINALE

✓ EXIGIBLE AU BAC

PRIORITÉ P1

Raisonnement par récurrence

principe et rédaction

🎯 À LA FIN DE CETTE FICHE, TU SAURAS...

- ✓ Connaître les deux étapes obligatoires d'un raisonnement par récurrence
- ✓ Rédiger une démonstration par récurrence complète et rigoureuse
- ✓ Utiliser une récurrence pour démontrer une propriété d'une suite définie par récurrence

TON PARCOURS DE RÉVISION — coche chaque partie une fois révisée !

- | | |
|--|---|
| ☐ 1 · Les mots à connaître | ☐ 8 · La carte mentale |
| ☐ 2 · Les règles essentielles | ☐ 9 · Trouve l'erreur |
| ☐ 3 · Méthode A | ☐ 10 · Exercices type Bac |
| ☐ 4 · Méthode B | ☐ 11 · QCM chrono (5 min) |
| ☐ 5 · Exemple type Bac | ☐ 12 · Ta carte « 30 secondes » |
| ☐ 6 · Les pièges à éviter | ☐ ∞ Corrections (pour les parents) |
| ☐ 7 · Tips pour t'en souvenir | |

👤 LE COIN DES PARENTS — pas besoin de connaître le cours, tout est justifié.

1. Aider à répartir les révisions de ce chapitre sur plusieurs jours (J+1/J+3/J+7/J+14), sans se prononcer sur le contenu mathématique.
2. Ce chapitre (raisonnement par récurrence) ouvre le programme de spécialité mathématiques de Terminale : une bonne maîtrise dès maintenant conditionne la suite de l'année, jusqu'à l'épreuve du Bac.
3. Votre rôle n'est plus de corriger le contenu mathématique, mais de suivre la régularité du travail (calendrier de révision, dossier Parcoursup) et de repérer les signaux d'alerte : décrochage, stress, isolement.

1 Les mots à connaître *surligne ceux que tu confonds !*

Récurrence — un raisonnement qui démontre qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier n à partir d'un rang donné, en deux étapes : initialisation puis hérédité.

Initialisation — la première étape du raisonnement par récurrence : elle vérifie que la proposition est vraie au rang de départ.

Hérédité — la deuxième étape du raisonnement par récurrence : elle démontre que si la proposition est vraie à un rang n , alors elle est vraie au rang $n+1$.

Hypothèse de récurrence — la supposition que la proposition $P(n)$ est vraie à un rang n , utilisée comme point de départ de l'étape d'hérédité.

Proposition $P(n)$ — l'énoncé mathématique dépendant de l'entier n dont on veut démontrer la vérité pour tout n à partir d'un rang.

Rang — la valeur de l'entier n à partir de laquelle une propriété ou une suite est étudiée.

Suite — une liste ordonnée de nombres réels indexée par les entiers, notée (u_n) , où u_n désigne le terme de rang n .

Suite définie par récurrence — une suite dont chaque terme est donné en fonction du terme précédent (u_{n+1} en fonction de u_n), par opposition à une formule explicite donnant directement u_n en fonction de n .

Terme général — la formule qui donne la valeur du terme de rang n d'une suite en fonction de n , notée u_n .

Majoration — le fait de démontrer qu'une suite reste toujours inférieure ou égale à un réel fixe, pour tout rang n à partir d'un certain seuil.

Minoration — le fait de démontrer qu'une suite reste toujours supérieure ou égale à un réel fixe, pour tout rang n à partir d'un certain seuil.

2 Les règles essentielles *chaque règle avec son exemple*

- 1 **Le raisonnement par récurrence démontre qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier n à partir d'un rang donné, en deux étapes obligatoires : initialisation et hérédité.**

exemple → Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, on vérifie $P(0)$ puis on montre que $P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie.

- 2 **L'étape d'initialisation vérifie que la proposition est vraie au premier rang étudié, en remplaçant n par cette valeur et en calculant chaque membre.**

exemple → Pour $P(n)$: « $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$ », l'initialisation au rang $n=1$ donne $1 = 1 \times 2 / 2$, soit $1 = 1$, l'égalité est vraie.

- 3 **L'étape d'hérédité suppose la proposition vraie à un rang n (hypothèse de récurrence) et démontre qu'elle reste vraie au rang $n+1$, en partant de cette hypothèse.**

exemple → En supposant $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$, on montre que $1+2+\dots+n+(n+1) = (n+1)(n+2)/2$.

- 4 **Conclure un raisonnement par récurrence : citer les deux étapes validées puis énoncer que la proposition est vraie pour tout entier n à partir du rang initial, par principe de récurrence.**

exemple → Initialisation vraie au rang 0, hérédité démontrée pour tout $n \geq 0$: donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

- 5 **Une rédaction rigoureuse annonce la proposition $P(n)$ avant de commencer, sépare clairement les deux étapes par un titre, et écrit explicitement l'hypothèse de récurrence dans l'étape d'hérédité.**

exemple → « Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie (hypothèse de récurrence). Montrons $P(n+1)$. »

- 6 **Le principe s'applique aussi aux suites définies par récurrence, pour démontrer des propriétés comme une minoration, une majoration ou une formule explicite du terme général.**

exemple → Pour démontrer que la suite définie par u_0 valant 1 et $u_{n+1} = u_n + 3$ vérifie $u_n \geq 1$ pour tout n , on utilise une récurrence.

3 Méthode A — Rédiger une démonstration par récurrence

Exemple suivi : démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$.

Étape 1 Énoncer la proposition $P(n)$ à démontrer et le rang de départ. $P(n)$: $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$, pour $n \geq 1$.

Étape 2 Initialisation : vérifier $P(n)$ au rang de départ. Au rang $n=1$: $1 = 1 \times 2 / 2$, soit $1 = 1$, l'égalité est vraie.

Étape 3 Hérédité : supposer $P(n)$ vraie à un rang $n \geq 1$ (hypothèse de récurrence) et démontrer $P(n+1)$.

Étape 4 Calculer $1+2+\dots+n+(n+1)$ en remplaçant $1+2+\dots+n$ par $n(n+1)/2$ d'après l'hypothèse : la somme devient $n(n+1)/2$ plus $(n+1)$. En mettant $(n+1)$ en évidence dans les deux termes, $n(n+1)/2$ plus $(n+1)$ s'écrit $(n+1)$ fois la quantité $n/2$ plus 1, soit $(n+1)$ fois $(n+2)/2$, ce qui donne $(n+1)(n+2)/2$.

✓ **Conclure :** l'initialisation et l'hérédité étant vérifiées, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$ par principe de récurrence.

4 Méthode B — Utiliser une récurrence pour démontrer une propriété d'une suite définie par récurrence

Exemple suivi : suite définie par u_0 valant 2 et $u_{n+1} = 2 \times u_n - 1$, démontrer que $u_n \geq 1$ pour tout n .

Étape 1 Énoncer la proposition $P(n)$: $u_n \geq 1$, pour tout entier $n \geq 0$.

Étape 2 Initialisation : vérifier au rang 0. u_0 vaut 2, or $2 \geq 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Étape 3 Hérédité : supposer $u_n \geq 1$ à un rang n (hypothèse de récurrence) et calculer $u_{n+1} = 2 \times u_n - 1$ à partir de cette hypothèse.

Étape 4 Comme $u_n \geq 1$, on a $2 \times u_n \geq 2$, donc $u_{n+1} = 2 \times u_n - 1 \geq 2 - 1$, soit $u_{n+1} \geq 1$: $P(n+1)$ est vraie.

✓ **Conclure :** par principe de récurrence, $u_n \geq 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

5 Exemple type Bac — rédigé pas à pas

On considère la suite (u_n) définie par u_0 valant 1 et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 3 \times u_n + 2$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $u_n \geq 1$.

Étape 1 — Énoncer $P(n)$: $u_n \geq 1$, et le rang de départ $n = 0$.

Étape 2 — Initialisation : calculer u_0 , qui vaut 1, et vérifier que $1 \geq 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Étape 3 — Hérédité : supposer $u_n \geq 1$ à un rang n (hypothèse de récurrence).

Étape 4 — Calculer $u_{n+1} = 3 \times u_n + 2$ à partir de l'hypothèse : comme $u_n \geq 1$, $3 \times u_n \geq 3$, donc $u_{n+1} \geq 3 + 2$, soit $u_{n+1} \geq 5$, donc $u_{n+1} \geq 1$.

Conclusion : L'initialisation et l'hérédité sont vérifiées : par principe de récurrence, $u_n \geq 1$ pour tout entier n .

6 Les pièges à éviter *les erreurs classiques en DS...*

✗ Oublier l'étape d'initialisation ou la traiter trop vite, sans écrire le calcul explicite au rang de départ.

✗ Confondre l'hypothèse de récurrence ($P(n)$ vraie) et ce qu'il faut démontrer ($P(n+1)$) : partir de la conclusion au lieu de la démontrer.

✗ Oublier de conclure explicitement en citant le principe de récurrence et le rang à partir duquel la propriété est vraie.

✗ Appliquer une récurrence à une propriété fausse dès le rang initial, sans avoir vérifié l'initialisation.

7 Tips — pour t'en souvenir

Récurrence = initialisation PUIS hérédité, toujours dans cet ordre, jamais l'inverse.

Hérédité : partir de l'hypothèse de récurrence ($P(n)$ vraie) pour arriver à $P(n+1)$, jamais l'inverse.

Conclure en citant les deux étapes vérifiées et en invoquant explicitement le principe de récurrence.

8 La carte mentale *dessiner, c'est mémoriser !*

« RÉCURRENCE » au centre, 4 branches colorées : INITIALISATION (vérifier P au rang de départ), HÉRÉDITÉ ($P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie), HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE (supposer $P(n)$ vraie), CONCLUSION (principe de récurrence). Un exemple par branche. Redessine-la de mémoire après avoir lu la fiche.



ta carte mentale, de mémoire...

Un élève démontre par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 5$, avec u_0 valant 3 et $u_{n+1} = u_n + 1$. Il écrit : «
Hérédité : supposons $u_n \leq 5$. Alors $u_{n+1} = u_n + 1 \leq 5 + 1$, soit $u_{n+1} \leq 6$, donc $u_{n+1} \leq 5$. Conclusion : par
récurrence, $u_n \leq 5$ pour tout n . »

→ cherche l'erreur avant de lire la réponse !

L'erreur : L'élève affirme $u_{n+1} \leq 5$ alors que son propre calcul donne $u_{n+1} \leq 6$: la majoration démontrée (6) ne correspond pas à celle annoncée dans $P(n)$ (5), l'hérédité n'est donc pas réellement établie. Dans l'étape d'hérédité, la conclusion obtenue par le calcul doit être exactement la proposition $P(n+1)$ annoncée, ici $u_{n+1} \leq 5$. Si le calcul ne donne que $u_{n+1} \leq 6$, la récurrence échoue : il faut reformuler la propriété testée ou en démontrer une plus forte.

10 Exercices type Bac *corrections en fin de fiche ✂*

Exercice 1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$.

Exercice 2. La suite (u_n) est définie par u_0 valant 0 et $u_{n+1} = u_n + 3$. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n = 3n$.

11 QCM — 10 questions

⌚ 5 MIN MAX • OBJECTIF 8/10

Une seule bonne réponse par question, sans calculatrice — entraînement épreuve d'automatismes du Bac 2026.

1. Le raisonnement par récurrence comporte deux étapes obligatoires, dans cet ordre :

- ☐ A initialisation puis hérédité
- ☐ B hérédité puis initialisation
- ☐ C hérédité puis conclusion

2. L'étape d'initialisation consiste à :

- ☐ A supposer $P(n)$ vraie à un rang n
- ☐ B vérifier $P(n)$ au rang de départ
- ☐ C conclure que $P(n)$ est vraie pour tout n

3. L'étape d'hérédité consiste à démontrer que :

- ☐ A $P(0)$ est vraie
- ☐ B $P(n)$ est vraie pour un rang n particulier
- ☐ C si $P(n)$ est vraie à un rang n , alors $P(n+1)$ est vraie

4. L'hypothèse de récurrence est :

- ☐ A la supposition que $P(n)$ est vraie à un rang n , utilisée pour démontrer $P(n+1)$
- ☐ B la proposition $P(0)$ vérifiée à l'initialisation
- ☐ C la conclusion finale du raisonnement

5. Pour démontrer par récurrence que $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$ pour tout $n \geq 1$, au rang de départ $n=1$, les deux membres de l'égalité valent :

- ☐ A 2 pour les deux membres
- ☐ B 1 pour les deux membres
- ☐ C des valeurs différentes pour les deux membres

6. Dans l'étape d'hérédité, on part :

- ☐ A de la conclusion à démontrer
- ☐ B d'un exemple numérique choisi au hasard
- ☐ C de l'hypothèse de récurrence, pour arriver à $P(n+1)$

7. Une suite (u_n) vérifie u_0 valant 1 et $u_{n+1} = u_n + 3$. Pour démontrer par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout n , l'initialisation vérifie que :

- ☐ A $u_0 \geq 1$
- ☐ B $u_1 \geq 1$
- ☐ C $u_n \geq 1$ pour un n quelconque

8. Si l'étape d'hérédité échoue (le calcul ne donne pas exactement $P(n+1)$), on peut conclure que :

- ☐ A la propriété est quand même vraie pour tout n
- ☐ B le raisonnement par récurrence tel que rédigé n'établit pas la propriété
- ☐ C seule l'initialisation suffit pour conclure

9. La conclusion d'un raisonnement par récurrence doit citer :

- ☐ A uniquement le résultat de l'hérédité
- ☐ B uniquement le rang de départ
- ☐ C les deux étapes vérifiées et le principe de récurrence

10. Pour démontrer que $u_n = 3n$ avec u_0 valant 0 et $u_{n+1} = u_n + 3$, l'étape d'hérédité calcule u_{n+1} à partir de l'hypothèse $u_n = 3n$. On obtient :

- ☐ A $u_{n+1} = 3n + 3$
- ☐ B $u_{n+1} = 3n$
- ☐ C $u_{n+1} = n + 3$



12

En 30 secondes — ta carte de dernière révision

découpe-la et garde-la dans ta trousse — révision de veille de contrôle !

- La récurrence démontre $P(n)$ pour tout entier n à partir d'un rang, en deux étapes : initialisation puis hérédité.
- Initialisation : vérifier $P(n)$ au rang de départ. Hérédité : supposer $P(n)$ vraie à un rang n et démontrer $P(n+1)$.
- Conclure en citant les deux étapes et le principe de récurrence, avec le rang à partir duquel la propriété est vraie.

PLAN DE RÉVISION ESPACÉE — relis la carte et refais le QCM : ☐ J+1 ☐ J+3 ☐ J+7 ☐ J+14



QCM en ligne

VA PLUS LOIN — TESTE-TOI SUR CETTE NOTION

📱 Scanne le QR code (ou clique dessus) : le QCM chronométré de cette notion, note immédiate, chaque erreur expliquée. Gratuit, sans inscription.

🎯 Pour t'entraîner — QCM en nombre, évaluations, explications détaillées, analyse de tes points faibles — l'abonnement Réussito (sans engagement) : via le QR code ou sur reussito.fr/abo

📖 Débloque toutes les fiches de Terminale : via le QR code ou sur reussito.fr/terminale



L'élève travaille sans les solutions sous les yeux ; vous corrigez ensemble avec ces pages. Chaque réponse est justifiée : pas besoin de connaître le cours.

Correction des exercices

Exercice 1. Initialisation : au rang $n=1$, $2 = 1 \times 2$, l'égalité est vraie. Hérédité : en supposant $2+4+\dots+2n = n(n+1)$, on a $2+4+\dots+2n+2(n+1) = n(n+1)+2(n+1)$. En mettant $(n+1)$ en évidence dans les deux termes, $n(n+1)+2(n+1)$ s'écrit $(n+1)$ fois la quantité n plus 2, soit $(n+1)(n+2)$, qui est bien la formule au rang $n+1$. Par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2. Initialisation : au rang $n=0$, u_0 vaut 0 et 3×0 fait 0, l'égalité est vraie. Hérédité : en supposant $u_n = 3n$, on a $u_{n+1} = u_n + 3 = 3n + 3 = 3(n+1)$, qui est bien la formule au rang $n+1$. Par récurrence, $u_n = 3n$ pour tout entier n .

Réponses du QCM — expliquées une par une

- 1 → A** Le raisonnement par récurrence commence toujours par vérifier l'initialisation, puis démontre l'hérédité. *Piège : hérédité puis initialisation = inverse l'ordre des deux étapes ; hérédité puis conclusion = omet l'étape d'initialisation, indispensable avant l'hérédité.*
- 2 → B** L'initialisation vérifie que la proposition est vraie au premier rang étudié. *Piège : supposer $P(n)$ vraie à un rang n = décrit l'hypothèse de récurrence de l'étape d'hérédité, pas l'initialisation ; conclure = décrit la dernière étape du raisonnement.*
- 3 → C** L'hérédité montre l'implication : $P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie, pour un rang n quelconque. *Piège : $P(0)$ est vraie = décrit l'initialisation ; $P(n)$ est vraie pour un rang n particulier = ne démontre rien, ce n'est que l'hypothèse de départ de l'hérédité.*
- 4 → A** L'hypothèse de récurrence est ce que l'on suppose vrai au rang n pour démontrer $P(n+1)$ dans l'étape d'hérédité. *Piège : $P(0)$ vérifiée à l'initialisation = décrit l'initialisation, pas l'hypothèse de récurrence ; la conclusion finale = intervient après les deux étapes, ce n'est pas une hypothèse.*
- 5 → B** Au rang $n=1$, la somme vaut 1 et $n(n+1)/2$ vaut $1 \times 2 \div 2$, soit également 1 : les deux membres coïncident, l'initialisation est vérifiée. *Piège : 2 pour les deux membres = erreur de calcul de $n(n+1)/2$ au rang 1, qui vaut 1 et non 2 ; des valeurs différentes = contredit le résultat, l'initialisation est justement vérifiée par la coïncidence des deux membres.*
- 6 → C** L'hérédité part toujours de l'hypothèse de récurrence ($P(n)$ vraie) pour démontrer $P(n+1)$. *Piège : partir de la conclusion à démontrer = raisonnement circulaire invalide ; un exemple numérique au hasard = ne démontre rien pour tout n , la récurrence doit être générale.*
- 7 → A** L'initialisation porte sur le rang de départ, ici $n=0$, donc sur u_0 . *Piège : $u_1 \geq 1$ = correspond au rang suivant, pas au rang de départ de la suite ; $u_n \geq 1$ pour un n quelconque = décrit l'hypothèse de récurrence de l'hérédité, pas l'initialisation.*
- 8 → B** Si l'hérédité n'est pas démontrée exactement, le raisonnement par récurrence échoue et ne permet pas de conclure. *Piège : la propriété est quand même vraie = suppose une conclusion sans preuve valide ; seule l'initialisation suffit = l'initialisation seule ne prouve rien pour les rangs suivants.*
- 9 → C** La conclusion rappelle que l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées, puis invoque le principe de récurrence. *Piège : uniquement le résultat de l'hérédité = oublie de mentionner l'initialisation, pourtant indispensable ; uniquement le rang de départ = ne mentionne aucune des deux étapes démontrées.*

10 → A

$u_{n+1} = u_n + 3 = 3n + 3$, ce qui s'écrit aussi $3(n+1)$, la formule attendue au rang $n+1$. *Piège : $u_{n+1} = 3n$ = oublie d'ajouter 3 lors du calcul ; $u_{n+1} = n + 3$ = erreur en remplaçant u_n par n au lieu de $3n$.*